القسم: رياضيات - صبر السنة: الرابعة المادة: نظرية الحلقات المحاضرة: الخامسة

مبرهنة

ليكن $f: A \to A'$ تشاكل جبري عندئذٍ

① إذا كانت k مثالي في A' فإن $f^{-1}(k)$ مثالي في A

② إذا كانت B مثالي في A وكانت f غامرة عندئذٍ $f(B)$ مثالي في A'

البرهان:

1- لنفرض أن k مثالي في A' أي أن

$$f^{-1}(k)=\{k : k\in A , f(k)\in k\}$$

$$0_{A'}\in k \Rightarrow f(0)\in k \Rightarrow 0\in f^{-1}(k)$$ ومنه $\phi \neq f^{-1}(k)$

• $x,y\in A$ فإن $f(x), f(y)\in k$ من تعريف الصورة العكسية

$$f(x-y)=f(x)-f(y)\in k \Rightarrow x-y\in A \Rightarrow x-y\in f^{-1}(k)$$

• $\forall x\in f^{-1}(k)\quad \forall \alpha\in R \Rightarrow x\in A \quad f(x)\in k$

$$f(\alpha x)=\alpha f(x)\in k \Rightarrow \alpha x\in A \Rightarrow \alpha x\in f^{-1}(k)$$

$\Leftarrow f^{-1}(k)$ موديول جزئي

لنبرهن أنه إذا كان $a\in A$ فإن

• $d_a(f^{-1}(k)) \subseteq f^{-1}(k)$

ليكن $a\in A$ و $x\in f^{-1}(k)$ عندئذٍ $x\in A$ ، $f(x)\in k$ وأن

$[a,x]\in A \quad \in A' \quad \in k$

ومنه $f([a,x])=[f(a),f(x)]=d_{f(a)}(f(x))\in k$

وبالتالي $[a,x]\in f^{-1}(k) \Rightarrow d_a(x)\in f^{-1}(k)$

ومنه $f^{-1}(k)$ مثالي في A

(2) ليكن B مثالي في A ، ولنفرض أن f غامر

$f(B) = \{ f(b) ; b \in B \}$

$f(B) \neq \phi$ لأن $0_A \in B \Rightarrow f(0_A) = 0_B \in f(B)$

$\bullet \forall x, y \in f(B) ; \exists x_1, y_1 \in B \quad x = f(x_1) \quad y = f(y_1)$

$x - y = f(x_1) - f(y_1) = f(x_1 - y_1) \in f(B)$

$\bullet \forall \alpha \in R \quad x \in f(B) \Rightarrow \exists x_1 \in B ; x = f(x_1)$

$\alpha x = \alpha f(x_1) = f(\alpha x_1) \in f(B)$

$\Leftarrow f(B)$ فضاء جزئي في A'

لنثبت أن $f(B)$ مثالي في A'

أي لنثبت أنه أياً كان $a \in A'$ فإن $d_a(f(B)) \subseteq f(B)$

ليكن $a \in A'$ ، $x \in f(B)$ عندئذٍ بما أن f غامر يوجد $b \in A$ بحيث $a = f(b)$ ومن جهة يوجد $y \in B$ بحيث $x = f(y)$ إذن

$d_b(y) = [b, y] \in B$

لأن B مثالي في A ومنه

$= f([b, y]) \in f(B)$

$= [f(b), f(y)] \in f(B)$

$= [a, x] \in f(B)$

$= d_a(x) \in f(B)$

ومنه فإن $f(B)$ مثالي في A'

مبرهنة:

ليكن $f : A \longrightarrow A'$ تشاكل جبور لي ، إذا كان B مثالي قابل للحل في A

عندئذٍ $f(B)$ مثالي قابل للحل في A'

محاضرات الدفتر

القسم :　　　　السنة :　　　　المادة :　　　　المحاضرة :

البرهان

نفرض أن B مثالي قابل للحل في A عندئذٍ فإن $f(B)$ مثالي في $\acute{A}$ فضلاً عن ذلك يوجد m عدد صحيح موجب حيث

$$D^m B = 0$$

نفرض أن n أصغر عدد صحيح موجب لأجله $D^n B = 0$

إن $\forall k \in N, \; f(D^k B) = D^k f(B)$

ومنه فإن

$$D^n f(B) = f(D^n B) = f(0) = 0$$

ومنه المثالي $f(B)$ قابل للحل في $\acute{A}$

مبرهنة:

ليكن A جبري غير التجميعي R، J ، I مثاليين قابلين للحل في A

1. $I \cap J$ مثالي قابل للحل في A
2. $I + J$ مثالي قابل للحل في A
3. $[I, J]$ مثالي قابل للحل في A

البرهان

لنفرض أن كل من J ، I قابل للحل عندئذٍ يوجد $n, m \in N$ حيث.

$D^n I = 0$ ، $D^m J = 0$ بما أنه تم إثبات أن $I \cap J$ ، $I + J$ ، $I J$ مثالي في A في المحاضرة السابقة

1) بما أن $I \cap J \subseteq I$

$$D^n(I \cap J) \subseteq D^n I = 0$$

ومنه $D^n(I \cap J) = 0$

مثالي $J \cap I$ قابل للحل

2) لدينا $J \triangle I$ مثالي في A وأن $J \triangle I \subseteq I$ عندئذٍ فإن جبري الخارج 2. ~~$\frac{I}{I \cap J}$~~ قابل للحل

$A: J \longrightarrow \frac{J}{I \cap J}$

$\frac{J}{I \cap J}$

وبما أن $\frac{J}{I \cap J} \cong \frac{I+J}{I}$ فإن $I+J/I$ قابل للحل وبما أن I

I قابل للحل فإن $J+I$ قابل للحل

③ $I \subseteq A \Leftarrow [I, J] \subseteq [A, J] \subseteq J$ لأن $[A,J]=[a,x]=d_a(x) \in J$

ومنه

$$D^m([I, J]) \subseteq D^m J = 0$$

ومنه فإن $[I, J]$ قابل للحل

جبور لي نصف البسيطة:

تعريف:

نقول عن جبر لي A فوق الحلقة R إنه نصف بسيط إذا كان A لا يحوي مثاليات تبديلية مغايرة للصفر

تعريف

ليكن I مثالي في جبر لي A نقول إن I تبديلية إذا كان $[I, I]=0$

مبرهنة:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذ الشروط الآتية متكافئة

① الجبر A نصف بسيط

② A لا يحوي مثاليات قابلة للحل مغايرة للصفر

③ $Rad A = 0$

البرهان

$1 \to 2$

نفرض أن الجبر A نصف بسيط نفرض جدلاً أنه يوجد مثالي B قابل للحل وأن $B \neq \Phi$ عندئذ يوجد دليل $n \in N$ بحيث $D^n B = 0$

نفرض k أصغر عدد صحيح موجب، $D^k B = 0$ عندئذ $D^{k-1} B \neq 0$

لكن $D^k B = [D^{k-1} B, D^{k-1} B] = 0$

وهذا يبين أن $D^{k-1}B$ مثالي تبديلي مغاير للصفر في A وهذا يناقض الفرض

إذا لا يوجد في A مثاليات قابلة للحل مغايرة للصفر

$2 \to 3$ واضح لأن $Rad A$ مثالي قابل للحل في A

$3 \to 1$

ليكن k مثالي تبديلي في A عندئذ $[k,k]=0$ ومنه $Dk=0$ أي أن

k قابل للحل في A ومنه

$$k \subseteq Rad A = 0$$

ومنه يأتي أن $k=0$، وهذا يبين أن A نصف بسيطة

انتهت المحاضرة